

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ 2024/2025 УЧЕБНОГО ГОДА

по математике

Код/шифр участника

М	1	0	1	4			
---	---	---	---	---	--	--	--

Красовский Сергей
Владимирович

(фамилия, имя, отчество)

10

(класс обучения)

10

(класс участия)

Муниципальное общеобразо-
вательное бюджетное учреждение
«Средняя общеобразовательная
школа № 10»

(полное наименование образовательной организации)

ТЕТРАДЬ

для _____

учени _____ класса _____

_____ школы _____

1	2	3	4	5	Всего	%	Статус
7	7	7	7	7	35с.	100%	Победитель.

№ 10.1 Пусть за час первая труба
заполнит x от всего бассейна (при
 $x = 0,5$ за час первая труба заполнит
половину бассейна, при $x = 0,1$ - одна-
тую часть, при $x = 2$ бассейн запол-
нится за пол часа),

за час вторая труба заполнит
 y от всего бассейна.

Пусть t - время за которое две
трубы, работая вместе заполнят
половину бассейна. Тогда

$x + y$ - часть от всего бассейна
которую наполнят обе трубы
работая вместе за один час.
 $(x + y)t$ - заполненная часть бассейна
через время t , что равно $0,5$.

$3x + 12y = 0,5$ т.к. по условию
после трёх часов работы 1-ой и 12
часов работы 2-ой в бассейне
предоставить еще половина от общего

1.75

2.75

3.75

4.75

5.75

объема воды.

$x(t+3)$ - часть нагрузки первой
трубы за всё время работы

$y(t+12)$ - часть нагрузки второй
трубы в бассейне за всё время
работы. Т.е. условие:

$$\begin{cases} x(t+3) = y(t+12) \end{cases}$$

$x(t+3) + y(t+12) = 1$ - часть всего
бассейна, наполненная в конце.

$2 y(t+12) = 1$ - искомое уравнение.

$$\begin{cases} y(t+12) = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t+3) = 0,5 \end{cases}$$

Получа верна система:

$$\begin{cases} 3x + 12y = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tx + ty = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yt + 12y = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt + 3x = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - yt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tx + ty = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12y - tx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt + 3x = 0,5 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{3x}{y} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} t = \frac{3x}{y} \\ tx + ty = 0,5 \\ t = \frac{12y}{x} \\ xt + 3x = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{y} = \frac{12y}{x} \\ tx + ty = 0,5 \\ xt + 3x = 0,5 \end{cases}$$

$$\frac{3x}{y} = \frac{12y}{x}$$

$$3x^2 = 12y^2$$

$$x^2 = 4y^2$$

т.к. $x > 0$ и $y > 0$ по условию, $|x| = x$ и $|y| = y$:

$$|x| = 2|y|$$

$$x = 2y$$

$$3x + 12y = 0,5$$

$$6y + 12y = 0,5$$

$$y = \frac{0,5}{18} = \frac{1}{36}$$

$$x = \frac{1}{18}$$

$\frac{1}{18}$ - часть бассейна занимает 1-ая

труба за час т.е. для наполнения всего бассейна потребуется 18 часов

Ответ: 18 часов.

10.3 Предположим, что

$$a^2 = \underbrace{60606 \dots 06}_{2024 \text{ раза } 06} \quad \text{и } a \in \mathbb{N}$$

Тогда:

$$a = 10x + y, \text{ где } x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ и } y \in [0; 9] \cap \mathbb{Z},$$

$$a^2 = (10x + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$$

$$a^2 \equiv 100x^2 + 20xy + y^2 \pmod{10}$$

$$a^2 \equiv y^2 \pmod{10}$$

Последняя цифра десятичной записи a^2 равна 6 т.е.

$$y^2 \equiv 6 \pmod{10} \text{ или десят. запись } y^2 \text{ окан. 6.}$$

$$0^2 = 0$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

$$5^2 = 25$$

$$6^2 = 36$$

$$7^2 = 49$$

$$8^2 = 64$$

$$9^2 = 81$$

Значит

$$y \in \{4, 6\}$$

$$a^2 \equiv 20xy + y^2 \pmod{100} - \text{последние}$$

2 цифры в десятичной записи числа a^2 .

1) $y = 4$

$$80x + 16 \equiv 16 \pmod{100}$$

$$80x \equiv 0 \pmod{100}$$

$$80x + 16 \equiv 6 \pmod{100}$$

$$80x + 10 \equiv 0 \pmod{100}$$

~~Проверим утверждение для~~

$$80x + 10 = k_1 \cdot 100, \text{ где } k_1 \in \mathbb{N}$$

$$8x + 1 = k_1 \cdot 10$$

$$8x + 1 \equiv 0 \pmod{10}$$

Проверим все остатки x от деления на 10:

$$x \equiv 0; \quad 1 \not\equiv 0$$

$$x \equiv 1; \quad 9 \not\equiv 0$$

$$x \equiv 2; 7 \neq 0$$

$$x \equiv 3; 5 \neq 0$$

$$x \equiv 4; 3 \neq 0$$

$$x \equiv 5; 1 \neq 0$$

$$x \equiv 6; 9 \neq 0$$

$$x \equiv 7; 7 \neq 0$$

$$x \equiv 8; 5 \neq 0$$

$$x \equiv 9; 3 \neq 0$$

Все сравнения ждем по модулю 10.

Т.к. ни один остаток не подходит
 $y \neq 9$.

$$2) y = 6$$

$$20x + 36 \equiv 6 \pmod{100}$$

$$20x + 30 \equiv 0 \pmod{100}$$

$$20x + 30 = K_2 \cdot 100, \text{ где } K_2 \in \mathbb{N}$$

$$2x + 3 \equiv K_2 \cdot 10$$

$$2x + 3 \equiv 0 \pmod{10}$$

Сначала рассмотрим все остатки

x при делении на 10.

$$x \equiv 0; 3 \neq 0$$

$$x \equiv 1; 5 \neq 0$$

$$x \equiv 2; 7 \neq 0$$

$$x \equiv 3; 9 \neq 0$$

$$x \equiv 4; 1 \neq 0$$

$$x \equiv 5; 3 \neq 0$$

$$x \equiv 6; 5 \neq 0$$

$$x \equiv 7; 4 \neq 0$$

$$x \equiv 8; 9 \neq 0$$

$$x \equiv 9; 1 \neq 0$$

Все сравнения мы по модулю 10.
Т.к. мы один остаток не получили
 $y \neq 6$.

Мы рассмотрим все варианты и
в каждом из них пришли к
противоречию, значит предположение
ошибочно.

ответ: нет.

10.4. Пусть $x = \min(a, b, c)$, $z = \max(a, b, c)$

$$y = a + b + c - x - z.$$

Получа $x \leq y \leq z$, и $x^2 \leq y^2 \leq z^2$

$$x + y \leq x + z \leq y + z$$

$$\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{x+z} \leq \frac{1}{x+y}$$

По условию эти числа образуют
прогрессию:

$$\begin{cases} \frac{1}{y+z} + d_1 = \frac{1}{x+z} \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{y+z} + 2d_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{y+z} + d_1 = \frac{1}{x+z} \\ d_1 = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+z} \end{cases}$$

$$d_1 = \frac{x+z-x-y}{(x+y)(x+z)} = \frac{z-y}{(x+y)(x+z)}$$

$$\frac{1}{y+z} + \frac{z-y}{(x+y)(x+z)} = \frac{1}{x+z}$$

По условию $x+y \neq 0$, $x+z=0$, $x+y \neq 0$:

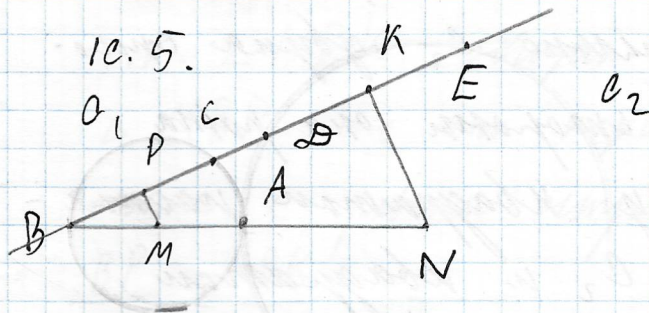
$$x+z + \frac{z^2-y^2}{x+y} = y+z$$

$$\frac{z^2-y^2}{x+y} = y-x$$

$$z^2 - y^2 = y^2 - x^2 \text{ или}$$

$$y^2 = x^2 + d_2, z^2 = x^2 + 2d_2, \text{ где } d_2 = y^2 - x^2.$$

x^2, y^2, z^2 - арифметическая прогрессия.
 Значит и a^2, b^2, c^2 , которые являются перестановкой x^2, y^2, z^2 составляют арифметическую прогрессию.



Дано. O_1 и O_2 - окружности, касающиеся в точке K в точке A .

AB - диаметр O_1 , $C \in O_1$ и

$D = BC \cap O_2$ и

$E = BC \cap O_1$

$(D \neq E)$

$BD < BE$;

$BC = 2 \text{ см}$,

$CD = 3 \text{ см}$,

$DE = 4 \text{ см}$

x - радиус C_1 ;

y - радиус C_2

Найти: x, y

Решение: Пусть M, N - центры C_1 и C_2 соответственно. По той же причине точка B относительно C_2 двукратно: с одной стороны она равна разности между квадратами расстояния от центра C_2 и квадратом радиуса C_2 т.е.

$BN^2 - y^2$, с другой стороны она равна $BE \cdot BD$, значит

$$BN^2 - y^2 = BE \cdot BD$$

$$BN = BM + MA + AN = 2x + y$$

$$BE = BC + CD + DE = 9 \text{ см}$$

$$BD = BC + CD = 5 \text{ см}$$

$$(2x + y)^2 - y^2 = 45$$

$$4x^2 + 4xy = 45 \quad (1)$$

т.к. DE - хорда C_2 , то N лежит на серединном перпендикуляре

DE . Пусть $K \in DE$ и $DK = KE$,
 тогда KN — симметричный перпендикуляр
 к DE и $\angle NKB = 90^\circ$. Аналогично,
 если $P \in BC$ и $PB = PC$, то
 $\angle MPB = 90^\circ$.

Т.к. $\angle NBK$ — общий для $\triangle NBK$ и
 $\triangle MBP$ то они подобны как прямоуголь-
 ные с равными острым углом. Поэтому

$$\frac{BP}{BM} = \frac{BK}{BN}$$

$$BP = \frac{BC}{2} = 1; \quad KD = \frac{DE}{2} = 2.$$

$$BK = BC + CD + DK = 7$$

$$\frac{BN}{BM} = \frac{7}{2} \quad \text{?}$$

$$BN = 2x + y; \quad BM = x$$

$$\frac{2x + y}{x} = \frac{7}{2} \quad \text{?}$$

$$2 + \frac{y}{x} = \frac{7}{2} \quad \text{?}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{2} \quad \text{?}$$

$$y = 5x$$

Подставив в (1);

$$4x^2 + 20x^2 = 45$$

$$24x^2 = 45$$

$$x = \sqrt{\frac{45}{24}} = \sqrt{\frac{15}{8}} \text{ — радиус положительный.}$$

$$y = 5\sqrt{\frac{45}{24}} = 5\sqrt{\frac{15}{8}} = \sqrt{\frac{375}{8}}$$

Ответ: $x = \sqrt{\frac{45}{24}}$; $y = 5\sqrt{\frac{45}{24}}$ ($x = \sqrt{\frac{15}{8}}$; $y = \sqrt{\frac{375}{8}}$).

10.2 Проверим любой цвет и рассмотрим на все орлоны с этим цветом. Пусть их будет x штук. Т.к. на каждом орлоне 3 различных цвета, и один из них выбранный всеми другими цветами на орлонах $2x$ (с каждого орлона 2 других цвета) с другой стороны без своего цвета будет $100 - 1 = 99$ других цветов. Значит:

$$2x = 99$$

$$x = 49,5, \text{ но } x - \text{кол-во орлонов,}$$

значит, $x \in \mathbb{N}$ противоречие.

Ответ: нет.

Переходим к задаче х.4:

Если в задаче $\frac{1}{a+b}$ — первый член
арифметической прогрессии $\frac{1}{b+c}$ — второй,
 $\frac{1}{a+c}$ — третий, то либо

1. $\frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a+b}$ либо $\frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+b}$

Отсюда .